**Part 2. MATHEMATICAL ANALYSIS**

**FUNCTION AND ITS PROPERTIES**

**1. Sets.** In order to study functions and graphs, we use set theory. This requires some standard symbols and terms, which you should become familiar with.

**A set** is a collection of objects (usually numbers). Denoted by A, B, C.

We refer to the objects in a set as its elements (or members).

If *a* is an element of A, we can write this symbolically as *a* . If b is not an element of A, we can write b .

Given two sets A and B, we say A is a subset of B if all elements of A are also elements of B, (A $ B).

The empty set is the set with no elements. It is denoted by .

***Standard Sets***

There are common sets of numbers which have their own symbols.

Note that numbers can belong to more than one set.

ℕ natural numbers counting numbers,

i.e. ℕ 1, 2, 3, 4, 5,… .

ℤ integers positive and negative whole numbers,

i.e. ℤ …,2, 1, 0,1, 2,…

ℚ rational numbers can be written as a fraction of integers.

ℝ real numbers all points on the number line.

Notice that ℕ is a subset of ℤ , which is a subset of ℚ, which is a subset of ℝ.

**2 Functions.**

Let X and Y be two non-empty sets. A function f : X Y is a rule which assigns to each x  X a unique element y = f(x) in Y .

The set of inputs is called the domain ***D(f)*** and the resulting set of outputs is called the range ***E(f)***.

For example, the velocity of a chemical reaction is proportional to the amount of substance taking part in the reaction; and the area of a circle is proportional to the square of the radius.

**Properties of Functions.** Consider the function ***y=f(x)*** defined on some set X with real values.

1. ***Bounded function***. The function ***f(x)***  is bounded from above, if there exists a real number M < ∞ such that ***f(x)<M*** [for all](http://en.wikipedia.org/wiki/For_all) *x* in *X*. (2 а-сурет)

The function ***f(x)***  is bounded from below, if there exists a real number M < ∞ such that ***f(x)>M*** [for all](http://en.wikipedia.org/wiki/For_all) *x* in *X*. (2 б-сурет)

The function ***f(x)***  is bounded, if there exists a real number M < ∞ such that |***f(x)|<M*** [for all](http://en.wikipedia.org/wiki/For_all) *x* in *X*. (2 в-сурет)

In other words, the function ***f(x)***  is called bounded, if the set of its values is bounded.



























2 а-сурет 2 б-сурет 2 в-сурет

***2. Even and odd function***. Let *f*(*x*) be a [real](http://en.wikipedia.org/wiki/Real_number)-valued function of a real variable. Then *f*  is **even** if the following equation holds for all *x* in the domain of *f*:

***f(-x)=f(x)***

Geometrically speaking, the graph face of an even function is symmetric with respect to the y-axis, meaning that its graph remains unchanged after reflection about the y-axis.

Then *f*  is **odd** if the following equation holds for all *x* in the domain of *f*:

***f(-x)=-f(x).***

Geometrically, the graph of an odd function has rotational symmetry with respect to the origin, meaning that its graph remains unchanged after rotation of 180 degrees about the origin

For example, *y=x2n, y=|x*| are even, ал y*=x2n+1*,  are odd.

1) The sum of two even functions is even, and any constant multiple of an even function is even.

2) The sum of two odd functions is odd, and any constant multiple of an odd function is odd.

3) The [product](http://en.wikipedia.org/wiki/Multiplication) of two even functions is an even function.

4) The product of two odd functions is an even function.

5) The product of an even function and an odd function is an odd function.

***3.* Periodic function.** A function *f*  is said to be **periodic** with period *P* (*P* being a nonzero constant) if we have

***f(x+P)=f(x)***

for all values of x. If there exists a least positive constant P with this property, it is called the prime period. A function with period P will repeat on intervals of length P, and these intervals are sometimes also referred to as periods.

For example, ***y=sin(x), y=cos(x)*** (periodic with period 2),  ***y=tg(x), y=ctg(x)*** (periodic with period ) - periodic functions

***4.* Monotonic Functions*.***

A function f(x) is said to be a strictly increasing function on (a, b) if from ***х1< х2*** should  ***f(х1)< f(х2)*** for all ***х1, х2*** (a, b) (3 a-сурет);

A function f(x) is said to be a strictly decreasing function on (a, b) if from ***х1< х2*** should  ***f(х1) > f(х2)*** for all ***х1, х2*** (a, b) (3 б-сурет);

A function f(x) is said to be a nondecreasing function on (a, b) if from ***х1< х2*** should  ***f(х1) f(х2)*** for all ***х1, х2*** (a, b); (3 в-сурет),

A function f(x) is said to be a nonincreasing function on (a, b) if from ***х1< х2*** should  ***f(х1)  f(х2)*** for all ***х1, х2*** (a, b) (3 г-сурет) ;

х

у

х

у

х

у

х

у

3 а-сурет 3 б-сурет 3 в-сурет 3 г-сурет

***5. Inverse Functions***. The idea of an inverse function is to reverse the effect of the original function. It is the “opposite” function.

The functions f and g are said to be inverses if

f ( g ( x )) = g ( f ( x )) = x ***.***

If we have the graph of a function, then we can find the graph of its inverse by reflecting in the line ***y=x***.

For example,  and  are inverse functions since (4-сурет).















4-сурет

A logarithmicfunction is one in the form . A function of the form  is known as an exponential (natural) function to the base e.

***6.* Composite Functions**. Two functions can be “composed” to form a new composite function. We take the output from one ***u=g(x)*** and use it as the input ***y=f(u)***  for the other:  ***y=f(g(x)),*** here  ***u*** - middle variable, ***х*** - independent variable.

Using function notation we have, say,  and 

The diagram above shows the composite functions:

 and 

Transforming Functions

There are numerous ways to apply transformations to functions to create new functions.

Let's look at some of the possibilities. Let *f*(*x*) be a [real](http://en.wikipedia.org/wiki/Real_number)-valued function of a real variable.

***1. y=f(х)+b.***  If the original function is y = f (x), the translation (sliding) of the function vertically upward or downward is the function f (x) + b.

if b > 0, the graph slides upward, if b < 0, the graph slides downward (5а-сурет).

2. ***y=f(х+a).***  If the original function is *y = f (x*), the translation (sliding) of the function horizontally to the left or right is given by the function *f (x + a).*

if *a* > 0, the graph slides to the left, if *a* < 0, the graph slides to the right (5б-сурет).













5а-сурет

y=*f*(*x-2*)

y=*f*(*x*)

y=*f*(*x*+*2*)











5 б-сурет

3. ***Reflection over the x-axis . y= - f(х).***  A reflection is a mirror image. This can also be thought of as "folding" over the *x*-axis. If the original function is *y = f (x)*, the reflection over the x-axis is function *-f (x).* (6а-сурет).

4. ***y=f(-х).***  Placing the edge of a mirror on the y-axis will form a reflection in the y-axis. This can also be thought of as "folding" over the y-axis.

If the original function is y = f (x), the reflection over the y-axis is function f (-x). (6б-сурет).





















6а-сурет 6б-сурет

5. ***y=kf(х).***  If the original functionis***y* = *f*(*x*),**the vertical stretching or compressing of the function is the function ***k f*(x).** If 0 < *k*< 1 (a fraction), the graph is compressed vertically by a factor of *k*  units.

If  *k*> 1, the graph is stretched vertically by a factor of *k* units (7а-сурет).

6. ***y=f(kх).***  If the original function is *y = f (x),* the horizontal stretching or compressing of the function is the function f (kx).

if 0 < k < 1 (a fraction), the graph is stretched horizontally by a factor of k units. If k > 1, the graph is compressed horizontally by a factor of k units. (7а-сурет).























7а-сурет 7б-сурет

7. ***y=*|*f(х)*|*.***  If , then , so the graph above x-axis leave unchanged. If , then , so so the graph below x-axis reflectible over the x-axis (8а-сурет).

8. ***y=f(*|*х*|)*.***   *f*  is even, that is ***f(*/*-x*/*)=f(*/*x*/*).*** Thegraph symmetric about the y-axis. We take the graph from right side and reflectible over the y-axis (8а-сурет).

*y=f(x)*

y

y=|*f(x)|*

x

y

y=*f*(|*x*|)

y=*f*(*x*)

8а-сурет 8б-сурет

**Theory of Limits**

In mathematics, the limit of a function is a fundamental concept

in analysis concerning the behavior of that function near a particular input.

Formal definitions, first devised in the early 19th century.

***y=f(х)***  функциясы қандай да бір *х0* нүкте маңайында анықталған болсын.

To say that

 \lim_{x \to p}f(x) = L, \, 

means that *ƒ*(*x*) can be made as close as desired to *L* by making *x* close enough, but not equal, to *p*.

The following definitions (known as [(ε, δ)-definitions](http://en.wikipedia.org/wiki/(%CE%B5,_%CE%B4)-definition_of_limit)) are the generally accepted ones for the limit of a function in various contexts.

### Limit of a sequence

### Formally, suppose a1, a2, ... is a sequence of real numbers. It can be stated that the real number L is the limit of this sequence, namely:

 \lim_{n \to \infty} a_n = L 

to mean for every real number ε > 0, there exists a natural number n0 such that for all n > n0, |an − L| < ε.

### Functions on the real line

Suppose *f* : **R** → **R** is defined on the [real line](http://en.wikipedia.org/wiki/Real_line) and ***x0****, A* ∈ **R**. It is said **the limit of *f* as *x* approaches *x0*  is *A*** and written

******

if the following property holds:

For every real *ε* > 0, there exists a real *δ* > 0 such that for all real x, 0 < | *x* − *x0* | < *δ* implies | *f*(*x*) − *A* | < *ε*.

Note that the value of the limit does not depend on the value of *f*(*x0*), nor even that *x0* be in the domain of *f*.

Solve the inequality : .

Interval  is named **-**neighborhood of .

Similarly solve the inequality : .

Interval  is named **-**neighborhood of *А*.

|  |
| --- |
| y  *А+*  *y=f(x)*  *A*  *A+*  0 x0- x0 х0 + x |

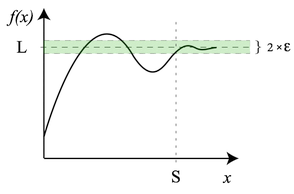
If the extended real line R is considered, i.e., R ∪ {-∞, ∞}, then it is possible to define limits of a function at infinity.

If *f*(*x*) is a real function, then **the limit of *f* as *x* approaches infinity is *L***, denoted

 \lim_{x \to \infty}f(x) = L,

if for all \varepsilon > 0, there exists *S* > 0 such that |f(x) - L| < \varepsilon whenever *x* > *S*. Or, symbolically:

\forall \varepsilon >0 \; \exists S >0 \; \forall x \in I \; (x > S \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)



Similarly, **the limit of *f* as *x* approaches negative infinity is *L***, denoted

 \lim_{x \to -\infty}f(x) = L,

if for all \varepsilon > 0 there exists *S* < 0 such that |f(x) - L| < \varepsilon whenever *x* < *S*. Or, symbolically:

\forall \varepsilon >0 \; \exists S <0 \; \forall x \in I \; (x < S \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)

**Properties.** Let existed limites of functions  and  as *x* approaches *x0* ***(***):  және.

1. Limit of the sum is the sum of the limits

=.

2. Limit of the product is the product of limits

=.

**Сonsequence.** =*С*, here *С* - const.

3. Limit of the ratio is the ratio of the limits

=.

**Example.**  функциясының  жағдайдағы шегін табу керек.

**Шешуі**. Қысқаша айтсақ  шек есептеу керек. Функция шегінің қасиеттерін қолданып есептейік:

.

функциясының  жағдайдағы шегі 4 болады екен.

**The first and second remarkable limits**

**Theorem. The function ** is not defined at the point *x=0*, but it has a limit *x* approaches *0* ()

****

proven for 0 < x < π/2:

Dividing everything by sin(x) yields

1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}

1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}

\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1

\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1

\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1

.

**Сonsequence***:*

**1) , 2) , 3).**

**Example.** а) .

б) .

**Теорема. The function ** has a limit *x* approaches infinity () and

****

**Сonsequence***:*

**1) ,** *a=e болғанда* **;**

**2) ,**  *a=e болғанда* **;**

**3) **

**Example. а)** екенін көрсет.

**Шешуі**.  деген білгілеу енгізейік. Осыдан . Және де  кезде . Енді шек есептесек

**.**

б)****

****

****

# Infinitely small and infinitely large values

**Анықтама.** *** функциясының  жағдайда шегі ноль болса, яғни , онда  функциясы  жағдайда ақырсыз аз функция деп аталады.***

Осы анықтаманы “” тілінде былай да айтуға болады: Кез келген  үшін  саны табылып,  теңсіздігін қанағаттандыратын барлық х-тер үшін  теңсіздігі орындалса,  функциясы  жағдайда **ақырсыз аз функция** деп аталады.

**Ақырсыз аз функция қасиеттері.**

1. Егер  функциясының  жағдайда *А* шегі бар болса, онда  функциясын осы А саны мен  жағдайда ақырсыз аз болатын  функцияқосындысы түрінде жазуға болады,яғни .
2. Ақырсыз аз функцияның шенелген функцияға (сонмен қатар, тұрақтыға, басқа ақырсыз азға) көбейтіндісі ақырсыз аз функция болады.
3. Ақырсыз аз функцияның шегі нолден өзге функцияға қатынасы ақырсыз аз функция болады.

**Анықтама.**  функциясының  жағдайда шегі шексіздік болса, яғни , онда  функциясы  жағдайда **ақырсыз үлкен функция** деп аталады.

Ақырсыз аз функция мен ақырсыз үлкен функция арасында мынадай байланыс бар: ***Егер  функциясы  жағдайда ақырсыз аз болса,  функциясы  жағдайда ақырсыз үлкен болады.***

**Мысалы**,  функциясы  жағдайда ақырсыз аз функция болады.

Шынында да,  шегін есептейік.

.

Ал  функциясы  жағдайда ақырсыз үлкен функция болады, яғни оның шегі шексіздік.

Шынында да, шегін есептейік.

.

Мұндағы  қатынасты шектер тілінде “ақырсыз азға кері шама ақырсыз үлкен” дейді де, шексіздікке теңестіреді.

Ақырсыз аз функциялар нолге әртүрлі жылдамдықпен жақындайды. Көптеген жағдайда ақырсыз аздардың нолге ұмтылу жылдамдығын анықтау үшін оларды өзара салыстыру керек болады. Салыстыру үшін олардың қатынасының  жағдайдағы шегін қарастырады.

***A comparison of infinitesimal\***

***Айталық  және   жағдайда ақырсыз аз функциялар және  болсын. Онда, егер***

***1)  болса  -ға қарағанда жоғары ретті ақырсыз аз деп;***

***2)  болса  мен  бірдей ретті ақырсыз аз деп;***

***3)  болса  мен  эквивалентті ақырсыз аз деп***

***аталады.***

 мен  эквивалентті дегенді  ~ деп жазады.

Егер  функциясы  жағдайда ақырсыз аз болса, онда

1. , ,

, ;

2. , ;

3. , ;

4. , ;

5. .

1.-5. қатынастар эквивалентті функциялар кестесін береді. Бұл кестені шек есептеу кезінде мына теоремаға сүйеніп қолдануға болады.

**Теорема.** Егер  жағдайда ~ және ~болса, онда

***.***

**Мысал.**  . Мұнда  жағдайда  болғандықтан  орнына  алынды.

**ФУНКЦИЯ ҮЗІЛІССІЗДІГІ. ҮЗІЛІС ТҮРЛЕРІ**

**Анықтама. * функциясының  жағдайда шегі функцияның сол нүктедегі мәніне тең болса, яғни , функция  нүктесінде үзіліссіз деп аталады.***

Егер 

.

Сонда функция үзіліссіздігінің анықтамасын былай да айтуға болады: *Берілген нүктеде аргументтің ақырсыз аз өсімшесіне функцияның да ақырсыз аз өсімшесі сәйкес келсе, яғни*



*функция  нүктесінде үзіліссіз деп аталады.*

 функциясы қандай да бір аралықтың үзіліссіз болуы үшін, ол сол аралықтың әрбір нүктесінде үзіліссіз болуы керек.

**Үзіліссіз функция қасиеттері.**

1.  функциясы  нүктесінде үзіліссіз, ал  функциясы  нүктесінде үзіліссіз болса,  күрделі функциясы  нүктесінде үзіліссіз болады және

.

1. Нүктеде үзіліссіз функциялардың алгебралық қосындысы, көбейтіндісі және қатынасы (бөліміндегі функция нолден өзге болғанда) үзіліссіз функция болады.

**Анықтама. * функциясының  жағдайда шегі функцияның сол нүктедегі мәніне тең болмаса, яғни , функция  нүктесінде үзілісті функция деп, ал нүктені функцияның үзіліс нүктесі деп атайды.***

Біржақты шектер ұғымын енгізейік.

Айталық  және , онда  деп жазады, ал осы жағдайдағы  шекті функцияның **сол жақты шегі** деп атайды. Дәл осылайша функцияның **оң жақты**  шегі де анықталады. Функцияның сол жақты және оң жақты шектерін **біржақты шектер** дейді.

Енді үзіліс түрлерін ажыратайық.

**Анықтама. *Функцияның  нүктесінде өз-ара тең емес ақырлы біржақты шектері бар болса,  нүктесі функцияның І-текті үзіліс нүктесі деп аталады. Кейде оны ақырлы секіріс деп*** (10а-сурет) ***атайды.***

**Анықтама. *Функцияның  нүктесіндегі ақырлы біржақты шектердің ең болмағанда біреуі жоқ болса,  нүктесі функцияның ІІ-текті үзіліс нүктесі деп аталады*** (10б-сурет)***.***

**Мысал.** а)  функциясы  нүктесінде үзіліссіздікке зертте.

**Шешуі.** 

,

яғни сол жақты шегі –1, ал оң жақты шегі 1, ақырлы сандар, өз-ара тең емес, олай болса  нүктесі І-текті үзіліс нүктесі болады (10а-сурет).

1

0 1 x

y

0 x

1

y

-1

0 2 x

1

y

б)  функциясын үзіліссіздікке зертте.

**Шешуі**. Функция  аралығында анықталған.  нүктесіндегі біржақты шектерді табайық.



,

яғни сол жақты шегі 0, ал оң жақты шегі шексіздік. Олай болса  нүктесі ІІ-текті үзіліс нүктесі болады (10б-сурет).

в)  функциясын үзіліссіздікке зертте.

**Шешуі.** Функция  аралығында анықталған.  нүктесіндегі біржақты шектерді табайық.



,

яғни сол жақты де, оң жақты шегі де шексіздік. Олай болса  нүктесі ІІ-текті үзіліс нүктесі болады (10в-сурет).